OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & \lambda+1\\ 0 & \lambda & 0\\ 1 & -2 & \lambda\end{pmatrix}$$

a) *(2 puntos)* Determine el rango de esa matriz según los valores de λ.
b) *(1 punto)* Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, cuando $\lambda=-2$.

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & \lambda+1\\ 0 & \lambda & 0\\ 1 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)-\lambda\cdot(\lambda+1)=\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-1)=\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-1)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=-1\\ \lambda=1\end{cases}\Rightarrow\forall\lambda\in\Re-\{-1\,,\,0\,,\,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Si\ \lambda=-1$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ \lambda=0$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ \lambda=1$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$b)$

$$Cuando\ \lambda=-2\Rightarrow|A|=(-2)\cdot(-2+1)\cdot(-2-1)=-6\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\ A^t\Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -2\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(-6)}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*
a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} -x-2y+12=0 \\ 3y-z-15=0 \end{cases} \quad y \quad s:\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}$$

b) *(1 punto)* Calcule la distancia entre esas rectas.

a) Puestas en paramétricas ambas rectas, estableceremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas al igualar sus coordenadas.
Si el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada es nulo, y sus vectores directores son iguales o proporcionales pueden ser coincidentes en caso de tener algún punto común o paralelos si no lo tienen, de no ser proporcionales las rectas se cortan en un punto.
De no ser el determinante ampliado nulo la rectas se cruzan en el espacio

$$r:\begin{cases} x=12-2y \Rightarrow z=-15+3y \Rightarrow r:\begin{cases} x=12-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-15+3\lambda \end{cases} \\ s:\begin{cases} x=2+5\mu \\ y=-3+2\mu \\ z=3\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-2\lambda=2+5\mu \\ \lambda=-3+2\mu \\ -15+3\lambda=3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda+5\mu=10 \\ \lambda-2\mu=-3 \\ 3\lambda-3\mu=15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 16 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 9 & 16 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 72-16=56\neq 0 \Rightarrow \textit{Se cruzan en el espacio}$$

b) Hallaremos un plano π que conteniendo a la recta **s** sea paralelo a la recta **r**, para ello tendremos como generadores a los vectores de las dos rectas y al vector **SG**, siendo **S** un punto cualquiera de la recta **s** (tomaremos el indicado en su ecuación) y **G** el punto genérico del plano, los tres vectores son coplanarios y por ello el volumen del paralelepípedo (calculado como el producto mixto de ellos) que forman, es nulo y la ecuación del plano buscado.
La distancia buscada es la distancia entre un punto cualquiera R de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano π.

$$\textit{Siendo } S(2\,,-3\,,0)\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-2\,,1\,,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(5\,,2\,,3) \\ \overrightarrow{SG}=(x\,,y\,,z)-(2\,,-3\,,0)=(x-2\,,y+3\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$3\cdot(x-2)+15\cdot(y+3)-4z-5z-6\cdot(x-2)+6\cdot(y+3)=0\Rightarrow -3\cdot(x-2)+21\cdot(y+3)-9z=0\Rightarrow$$
$$(x-2)-7\cdot(y+3)+3z=0\Rightarrow \pi\equiv x-7y+3z-23=0$$

$$\textit{Siendo } R(12\,,0\,,-15)\Rightarrow d(r\,,s)=d(R\,,\pi)=\frac{|1\cdot 12-7\cdot 0+3\cdot(-15)-23|}{\sqrt{1^2+(-7)^2+3^2}}=\frac{|12-45-23|}{\sqrt{1+49+9}}=\frac{|-56|}{\sqrt{59}}$$

$$d(r\,,s)=\frac{56\cdot\sqrt{59}}{59}\,u$$

3. *(5 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Considere la función : $f(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$ **.** Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $\boldsymbol{f(x)}$**.**

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable **t = cos x** calcule: $\int \dfrac{\cos^2 x}{sen\ x}\,dx$

c) *(2 puntos)*

1) (1 punto) Calcule los valores de **a** y **b** para que la función $f(x)=ax^3+bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto **(1 , 2)**.

2) (1 punto) Calcule el área encerrada por la curva $f(x)=2x^3-3x^2$ y la parte positiva del eje **OX**.

$a)$

$$f'(x)=\frac{2x\,e^x-e^x\left(x^2-3\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(-x^2+2x+3\right)}{\left(e^x\right)^2}=(-1)\frac{x^2-2x-3}{e^x}\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16\geq0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2+4}{2}=3\\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$$

$$Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow(-1)\frac{(x-3)\,(x+1)}{e^x}>0\Rightarrow\begin{cases}-1<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-3>0\Rightarrow x>3\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ **-1**	**-1** **3**	**3** ∞
-1 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 3	**(-)**	**(-)**	**(+)**
e^x > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
-1 < 0	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/-1<x<3$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(x<3)$

Mínimo relativo en $x=-1\Rightarrow f(-1)=\dfrac{(-1)^2-3}{e^{-1}}=\dfrac{(1-3)}{e^{-1}}=-2e$ **de decrecimiento pasa a crecimiento**

Máximo relativo en $x=3\Rightarrow f(3)=\dfrac{3^2-3}{e^3}=\dfrac{6}{e^3}$ **de crecimiento pasa a decrecimiento**

Continuación del Problema 3 de la opción A

$$f''(x)=(-1)\frac{(2x-2)\,e^{x}-\left(x^{2}-2x-3\right)e^{x}}{e^{2x}}=(-1)\frac{\left(2x-2-x^{2}+2x+3\right)e^{x}}{e^{2x}}=(-1)\frac{-x^{2}+4x+1}{e^{x}}$$

$$f''(x)=\frac{x^{2}-4x-1}{e^{x}}\Rightarrow x^{2}-4x-1=0\Rightarrow \Delta=(-4)^{2}-4\cdot 1\cdot(-1)=20\geq 0\Rightarrow$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}\\ x=\dfrac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\frac{\left(x-2-\sqrt{5}\right)\left(x-2+\sqrt{5}\right)}{e^{x}}\Rightarrow Concavidad\Rightarrow f''(x)>0$$

$$\frac{\left(x-2-\sqrt{5}\right)\left(x-2+\sqrt{5}\right)}{e^{x}}>0\Rightarrow\begin{cases}e^{x}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-2-\sqrt{5}>0\Rightarrow x>2+\sqrt{5}\\ x-2+\sqrt{5}>0\Rightarrow x>2-\sqrt{5}\end{cases}$$

	$-\infty$ … $2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$ … $2+\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$ … ∞
$e^{x}>0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$x>2-\sqrt{5}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
$x>2+\sqrt{5}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Concavidad $\forall x\in\Re/\left(x<2-\sqrt{5}\right)\cup\left(x>2+\sqrt{5}\right)$

Convexidad $\forall x\in\Re/\,2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$

Punto de inflexión en $x=2-\sqrt{5}\Rightarrow f\left(2-\sqrt{5}\right)=\dfrac{\left(2-\sqrt{5}\right)^{2}-3}{e^{\left(2-\sqrt{5}\right)}}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{e^{\left(2-\sqrt{5}\right)}}$

Punto de inflexión en $x=2+\sqrt{5}\Rightarrow f\left(2+\sqrt{5}\right)=\dfrac{\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}-3}{e^{\left(2+\sqrt{5}\right)}}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{e^{\left(2+\sqrt{5}\right)}}$

$b)$

$$\int \frac{\cos^2 x}{sen\ x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{sen^2\ x}\,sen\ x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\,sen\ x\,dx = \int \frac{t^2}{1-t^2}\,(-dt) = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt =$$

$$\cos x = t \Rightarrow -sen\ x\,dx = dt \Rightarrow sen\ x\,dx = -dt$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^2-1}\,dt + \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = t + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = t + \frac{1}{2}\cdot \ln u - \frac{1}{2}\cdot \ln v =$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} \Rightarrow$$

$$A(t+1)+B(t-1)=1 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow A(-1+1)+B(-1-1)=1 \Rightarrow -2B=1 \Rightarrow B=-\dfrac{1}{2} \\ t=1 \Rightarrow A(1+1)+B(1-1)=1 \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{sen\ x}\,dx = \cos x + \frac{1}{2}\cdot \ln \frac{u}{v} = \cos x + \ln \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} = \cos x + \ln \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}} + K$$

$c)$ 1)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow \begin{cases} f(1)=2 \Rightarrow a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 = 2 \Rightarrow a+b=2 \\ f'(1)=0 \Rightarrow 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 = 0 \Rightarrow 3a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-2b=-4 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-4$$

$$-4+b=2 \Rightarrow b=6 \Rightarrow f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$c)$ 2)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow 2x^3-3x^2=0 \Rightarrow (2x-3)x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$x=1 \in \left(0\,,\,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(1) = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 = 2-3 = -1 \Rightarrow Zona\ negativa$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{3}{2}} \left(2x^3-3x^2\right) dx \right| = -\int_0^{\frac{3}{2}} \left(2x^3-3x^2\right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(3x^2-2x^3\right) dx = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 0^3\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 0^4\right] = \frac{27}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{81}{16} = \frac{108-81}{32} = \frac{27}{32}\,u^2$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde x, y, z, son números reales

Determine **x** , **y** y **z** para que el vector $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema **M A** = **B**

b) *(1,5 puntos)* Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde **a** , **b** y **c** son números reales que verifican que

$a\neq 0,\ a+b=0$, $c=a$. Determine si el sistema **NX** = **B** es compatible determinado.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z+3x \\ z+2x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow 18z=2\Rightarrow z=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}\Rightarrow -y-5\cdot\frac{1}{9}=-1\Rightarrow$$

$$y=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}\Rightarrow x+2\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{1}{9}=1\Rightarrow x+\frac{8}{9}+\frac{3}{9}=1\Rightarrow x=1-\frac{11}{9}=-\frac{2}{9}$$

$$Solución\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)$$

$b)El\ sistema\ es\ Compatible\ Deter\min ado\ si\ el\ \det er\min ante\ de\ las\ incognitas\ no\ es\ nulo$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} ax+by+cz \\ bx+cy+az \\ cx+ay+bz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ bx+cy+az=0 \\ cx+ay+bz=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=acb+acb+acb-c^3-a^3-b^3=-a^3-b^3-c^3+3abc\Rightarrow Como\ c=a\Rightarrow$$

$$-a^3-b^3-a^3+3aba=-2a^3+3ba^2-b^3=-2a^3+2ba^2+ba^2-b^3=-2a^2(-a+b)+b\left(a^2-b^2\right)=$$

$$=-2a^2(-a+b)+b\,(a+b)\,(a+b)=-2a^2(-a+b)+b\cdot 0\cdot(a+b)=-2a^2(-a+b)\Rightarrow Como\Rightarrow b=-a\Rightarrow$$

$$-2a^2(-a-a)=-2a^2\cdot(-2)=4a^3\neq 0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

2. *(2 puntos)*
a) *(1 punto)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:
$r:\begin{cases} 5x-3y+2z=1 \\ x+3y-2z=-4 \end{cases}$ que pasa por el punto **(0 , 2 , −4).**
b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto **P = (1 , 1 , 0)** a la recta **r** anterior.

a) Sustituyendo el valor del punto en las ecuaciones tendremos el valor de la recta pedida

$$\begin{cases} 5\cdot 0-3\cdot 2+2\cdot(-4)+D=0 \Rightarrow 0-6-8+D=0 \Rightarrow D=14 \\ 0+3\cdot 2-2\cdot(-4)+E=0 \Rightarrow 0+6+8+E=0 \Rightarrow E=-14 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} 5x-3y+2z+14=0 \\ x+3y-2z-14=0 \end{cases}$$ b)

Hallaremos un plano π que conteniendo al punto **P** sea perpendicular a la recta r, por ello su vector director es el de esta recta que es perpendicular al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y su producto vectorial es nulo y la ecuación que queremos conocer.
Hallaremos, posteriormente el punto **Q** de intersección de la recta y el plano hallado, el módulo del vector **PQ** es la distancia buscada.
El vector director de la recta es el resultante del cálculo del producto vectorial de los vectores que la generan y que están determinados en su ecuación.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+15\vec{k}+3\vec{k}-6\vec{i}+10\vec{j}=12\vec{j}+18\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(0\,,12\,,18)\equiv(0\,,2\,,3) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,\,y\,,\,z)-(1\,,1\,,0)=(x-1\,,\,y-1\,,\,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow (0\,,\,2\,,\,3)\cdot(x-1\,,\,y-1\,,\,z)=0$$

$$2y-2+3z=0 \Rightarrow \pi\equiv 2y+3z-2=0$$

De la ecuación de la recta, sumando las ecuaciones

$$6x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)+3y-2z=-4 \Rightarrow 3y=-4+\frac{1}{2}+2z \Rightarrow 3y=-\frac{7}{2}+2z$$

$$y=-\frac{7}{6}+\frac{2}{3}z \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{7}{6}+2\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\left(-\frac{7}{6}+2\lambda\right)+3\cdot 3\lambda-2=0 \Rightarrow -\frac{7}{3}+4\lambda+9\lambda=2 \Rightarrow 13\lambda=2+\frac{7}{3}$$

$$13\lambda=\frac{13}{3} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3} \Rightarrow Q\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{7}{6}+2\cdot\frac{1}{3} \\ z=3\cdot\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,1\right)-(1\,,1\,,0)=\left(-\frac{3}{2}\,,-\frac{3}{2}\,,1\right) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{9+9+4}{4}}=\sqrt{\frac{22}{4}}=\frac{\sqrt{22}}{2}\,u$$

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable t = e^x calcule $\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx$

c) *(1,5 puntos)* Calcule: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

a) Si uno de ellos tiene **L** metros de lado, el de triple perímetro es **3L** metros de lado, el lado del último cuadrado sea M

$$\begin{cases} 1248 = 4L + 4M + 4\cdot 3L = 16L + 4M \Rightarrow 4M = 1248 - 16L \Rightarrow M = \frac{1248-16L}{4} = 312 - 4L \\ A = L^2 + M^2 + (3L)^2 = 10L^2 + M^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = 10L^2 + (312-4L)^2 \Rightarrow A' = \frac{dA}{dL} = 20L + 2\cdot(312-4L)\cdot(-4) = 20L - 2496 + 32L = 52L - 2496 \Rightarrow$$

$$Si\ A' = 0 \Rightarrow 52L - 2496 = 0 \Rightarrow 52L = 2496 \Rightarrow L = \frac{2496}{52} = 48 \Rightarrow$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dL^2} = 52 > 0 \Rightarrow A''(48) = 52 > 0 \Rightarrow Minimo \Rightarrow \begin{cases} L = 48\ m \\ 3L = 144\ m \\ M = 312 - 4\cdot 48 = 120\ m \end{cases}$$

$b)$

$$\int \frac{2e^x}{e^x - 2(e^x)^{-1}}\,e^x\,dx = \int \frac{2t}{t-2t^{-1}}\,dt = \int \frac{2t}{t-\frac{2}{t}}\,dt = \int \frac{2t}{\frac{t^2-2}{t}}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2-2}\,dt = \int 2\,dt + \int \frac{4}{t^2-2}\,dt =$$

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^2 & t^2-2 \\ \hline \underline{-2t^2+4} & 2 \\ 4 & \end{array} \qquad \frac{2t^2}{t^2-2} = 2 + \frac{4}{t^2-2}$$

$$\frac{4}{t^2-2} = \frac{4}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} = \frac{A(t+\sqrt{2}) + B(t-\sqrt{2})}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} \Rightarrow A(t+\sqrt{2}) + B(t-\sqrt{2}) = 4$$

$$\begin{cases} Si\ t = -\sqrt{2} \Rightarrow A(-\sqrt{2}+\sqrt{2}) + B(-\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow -2\sqrt{2}B = 4 \Rightarrow B = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\ Si\ t = \sqrt{2} \Rightarrow A(\sqrt{2}+\sqrt{2}) + B(\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow 2\sqrt{2}A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{t^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \Rightarrow \int \frac{2e^x}{e^x - 2(e^x)^{-1}}\,e^x\,dx = \int \frac{2t}{t-2t^{-1}}\,dt = 2t + \int \frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\,dt - \int \frac{\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\,dt =$$

$$= 2e^x + \int \frac{\sqrt{2}}{u}\,du - \int \frac{\sqrt{2}}{v}\,dv = 2e^x + \sqrt{2}\cdot \ln u - \sqrt{2}\cdot \ln v = 2e^x + \sqrt{2}\ln\frac{u}{v} = 2e^x + \sqrt{2}\ln\frac{e^x-\sqrt{2}}{e^x+\sqrt{2}} + K$$

$$t - \sqrt{2} = u \Rightarrow dt = du \qquad t + \sqrt{2} = v \Rightarrow dt = dv$$

$c)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\frac{1}{1-1}-\frac{1}{\ln(1)}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}=\frac{\ln(1)-1+1}{(1-1)\ln(1)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{\ln(x)+(x-1)}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln(x)+x-1}=\frac{1-1}{\ln(1)+(1-1)}=$$

$$=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{-1}{\frac{1}{1}+1}=-\frac{1}{2}$$